**Министерство науки и высшего образования Российской̆ Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет информационных технологий и программирования

Расчетное задание №4   
по дисциплине «Вычислительная математика»

Тема: Методы решения систем нелинейных уравнений.

Выполнил студент группы № M3311

Ершова Мария, Ходжаев Дорюш

Условие:

Решите систему нелинейных уравнений методом Ньютона и методом простых итераций с точностью .

Порядок выполнения работы:

1. Выберите начальное приближение, удовлетворяющее условию сходимости методов.
2. Составьте методику решения системы уравнений методом Ньютона и методом простой итерации.
3. Составьте программу решения системы нелинейных уравнений с точностью до , выводящую результаты в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| … | … | … | … |

1. Найдите все корни уравнения и выпишите их с верными знаками.
2. Сравните скорости сходимости метода Ньютона и метода простых итераций.

Вариант 3:

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Матрица Якоби.
3. Геометрический способ отделения корней. Выбор начального приближения.
4. Условие сходимости метода Ньютона, решение нелинейных систем уравнений.
5. Достоинства и недостатки метода Ньютона.
6. Нахождение обратной матрицы.
7. Условие сходимости метода простой итерации решение нелинейных систем уравнений.
8. Достоинства и недостатки метода простой итерации.
9. Метод Зейделя.

Уровни заданий:

Уровень 1. (25 баллов) Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом простой итерации. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (25 баллов) Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (50 баллов) Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона и методом Зейделя. Ответить на контрольные вопросы.

Часть 1:

В первой части необходимо выбрать начальное приближение, удовлетворяющее условию сходимости методов.

Для начала определим условия сходимости методов Ньютона и простых итераций.

Для обоих методов существует теорема о достаточных условиях сходимости, её мы и опишем ниже.

Для метода Ньютона:

Пусть функция непрерывна и дифференцируема в открытом выпуклом множестве .

Предположим, что существуют и , такие что:

*,*

и существует , причем:

и .

Тогда существует , такое что для всех последовательность

порождаемая соотношением по методу Ньютона сходится и удовлетворяет неравенству:

Для метода простых итераций:

Пусть функции и , непрерывны в области , причем выполнено неравенство:

где - некоторая постоянная.

Если последовательность приближений не выходит из области , то процесс последовательных приближений сходится к вектору единственному решению системы.

Условие выполняется, если для любого , принадлежащего, справедливы неравенства:

соответственно, где

Для выбора начального приближения найдем координаты точек пересечения кривых, соответствующих первому и второму уравнениям с помощью кода.

Для этого мы графически отрисуем графики функций и найдем координаты точек пересечения:

Код:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Результат:

Изображение выглядит как снимок экрана, линия, График, диаграмма

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

На графике мы видим две точки, в которых графики функций пересекаются. Теперь необходимо проверить эти две точки на достаточные условия сходимости для двух методов.

Для метода Ньютона:

Начальное приближение , составим матрицу Якоби:

Подставим координаты нашей точки и вычислим определитель:

Так как определитель не равен 0, следовательно матрица обратима.

Теперь проверим данное условие :

Для начала найдем обратную матрицу:

А теперь найдем

Так как:

Найдем :

Следовательно:

Мы определили норму обратной матрицы якобиана в точке:

Теперь проверим, что непрерывна по Липшицу:

и - произвольные точки в окрестности этой точки.

Вычислим норму матрицы разности:

По формуле:

Получаем:

В итоге получаем:

— это максимально возможное "растяжение" (или изменение) элементов Якобиана при изменении переменных.

Очевидно, условие сходимости выполняется.

Начальное приближение , составим матрицу Якоби:

Подставим координаты нашей точки и вычислим определитель:

Так как определитель не равен 0, следовательно матрица обратима.

Теперь проверим данное условие :

Для начала найдем обратную матрицу:

А теперь найдем

Так как:

Найдем :

Следовательно:

Мы определили норму обратной матрицы якобиана в точке:

Теперь проверим, что непрерывна по Липшицу:

и - произвольные точки в окрестности этой точки.

Вычислим норму матрицы разности:

По формуле:

Получаем:

В итоге получаем:

— это максимально возможное "растяжение" (или изменение) элементов Якобиана при изменении переменных.

Очевидно, условие сходимости выполняется.

Для метода простых итераций:

Преобразуем систему так, чтобы выполнялось условие сходимости:

Найдем частные производные:

Теперь проверим выполнение условий сходимости для обеих точек.

Для будем рассматривать окрестность:

Тогда:

Следовательно, можно получить оценки:

Очевидно, метод не гарантированно будет сходиться. Поэтому проверим вторую точку с координатами (0,636; 0,904).

Для будем рассматривать окрестность:

Тогда:

Следовательно, можно получить оценки:

Очевидно, условие сходимости не выполняется.

В итоге примем за начальное приближение точку .

Часть 2:

Во второй части необходимо составить методику решения системы уравнений методом Ньютона и методом простой итерации. Здесь мы опишем эти методы, а реализуем их уже в коде, который будет представлен в 3 части, там же будут результаты.

Метод ньютона:

Дана система уравнений с неизвестными:

В векторной форме: , где – вектор функция. Для всех рассматриваемых далее методов требуется находить начальное приближение . В случае это можно сделать графически, определив координаты точки пересечения кривых, описываемых уравнениями .

Обозначим матрицу Якоби:

Полагаем, что определитель матрицы отличен от нуля.

Если мы не знаем точное решение, то заменяем приближенно уравнение на линейное, аналогично разложению в ряд Тейлора:

Умножаем на обратную матрицу .

Формула для нахождения решения является естественным обобщением метода Ньютона для решения нелинейных уравнений:

;

Решение системы для через обратную матрицу:

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем к виду:

Умножаем последнее выражение слева на матрицу Якоби:

Или

В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно .

После ее определения вычисляется следующее приближение:

Методика решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона:

1. Задать начальное приближение, точность положить .
2. Решить систему линейных алгебраических уравнений относительно

:

.

1. Вычислить следующее приближение:

.

1. Если, , то решение найдено. Иначе идем на п.2.

Метод простых итераций:

Дана система уравнений с неизвестными:

Где – нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области из .

Для применения метода требуется привести систему к каноническому виду:

Или в векторной форме , функции определены и непрерывны в окрестности изолированного решения .

Итерационный процесс записывается в виде:

Методика решения системы нелинейных уравнений методом простых итераций:

1. Привести систему к каноническому виду и проверить условие сходимости.
2. Задать начальное приближения удовлетворяющее условию сходимости.

– точность

1. Вычислить:
2. Если , то процесс завершен и , иначе и перейти к п.3.

Часть 3:

В этой части нам необходимо составить программу для решения нашей системы нелинейных уравнений с точностью до , выводящую результаты в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| … | … | … | … |

Стоит отметить, что мы не смогли подтвердить сходимость метода простых итераций в точках пересечения двух графиков – это видно из результатов вычислений, представленных выше.

Подобная ситуация возможна и объясняется так:

Разберёмся на уровне теории.

Метод Ньютона:

* Сходится квадратично, а значит очень быстро.
* Метод не требует приведения системы к специальной форме.
* Главное требование — обратимость якобиана в окрестности решения и локальная непрерывность производных.

Метод простых итераций:

* Сходится линейно и только если выполнено жёсткое условие в области итераций:
* Нужно специально преобразовать систему в каноническую форму.
* Метод очень чувствителен к начальному приближению и может уйти в расходимость при малейшем отклонении.

В нашем случае недостатки метода простых итераций сыграли свою роль, и мы получили подобный результат.

Итог:

Система нелинейных уравнений может расходиться в методе простых итераций и одновременно сходиться по Ньютону. Именно это и наблюдается в нашей работе. Но все же у нас есть шанс, что в точке метод простых итераций может сойтись.

Так как по условию нам необходимо составить программу для решения нашей системы нелинейных уравнений с точностью до двумя методами, то мы это сделаем и продемонстрируем результат, какой он есть.

Код:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Мультимедийное программное обеспечение, программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение, Мультимедийное программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение, Мультимедийное программное обеспечение

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, программное обеспечение

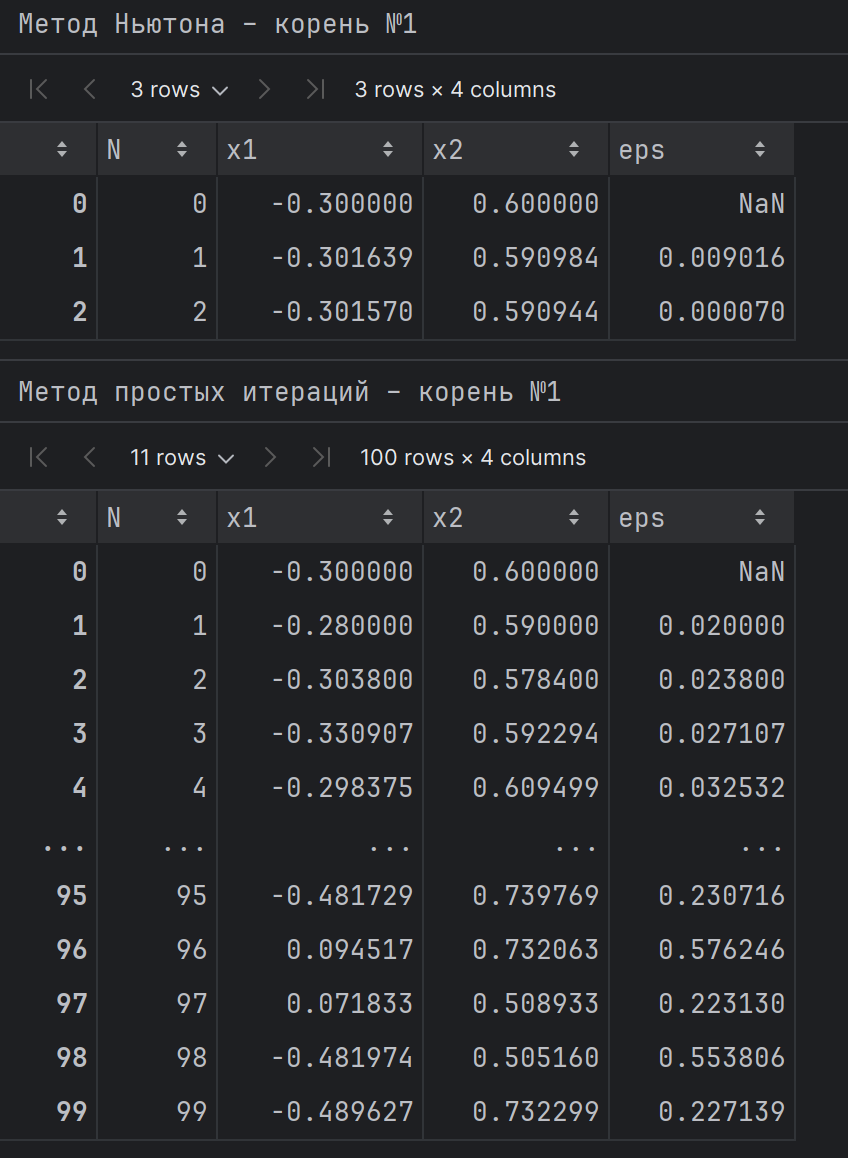
Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Теперь запустим код, посмотрим на результаты, которые занесены в таблицу для каждого решения, а именно для метода Ньютона с , для метода простых итераций с и для метода Ньютона с :

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Как мы видим результаты очень хорошие (даже метод простых итераций выполнен), но это так из-за очень точно-подобранных начальных приближений. Давайте посмотрим на результат если сделать начальное приближение равным :



Как мы видим метод Ньютона был выполнен достаточно быстро – потребовалось всего 3 итерации, а вот метод простых итераций не вышло довести до конца и получить корни.

Из этого можно сделать вывод, что метод простых итераций очень чувствителен к точности начально приближения и от этого может быть далеко не всегда удобен, в то же время метод Ньютона, хоть и более сложный с точки зрения вычислений, но сходится гораздо быстрее и не требует такой точности .

Часть 4:

В этой части нам необходимо найти все корни уравнения и выписать их с верными знаками.

Вот наш результат:

Корень №1 — методом Ньютона:

Корень №1 — методом простых итераций:

Корень №2 — методом Ньютона:

Часть 5:

В этой части требуется сравнить скорости сходимости метода Ньютона и метода простых итераций.

Для метода Ньютона:

Теорема о достаточных условиях сходимости метода Ньютона свидетельствует о локальной квадратичной сходимости этого метода, следовательно:

Вспомним, что ранее мы уже вычисляли и :

Рассчитаем скорость сходимости для корня №1, найденного методом ньютона:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Продемонстрируем как вычисляется :

Теперь найдем — это оценка, какая ошибка должна была бы быть, если метод Ньютона действительно сходится квадратично:

Получаем:

Получаем в итоге, что сильно меньше , и это нормально так как итераций было очень мало, и метод только настраивался.

Для метода простых итераций:

Если система приведена к необходимому виду и выполняется условие сходимости:

То сходимость линейная, и погрешность на шаге оценивается так:

Рассчитаем скорость сходимости для корня №1, найденного методом простых итераций:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Продемонстрируем как вычисляется :

Предположим, что на следующем шаге , делаем мы это для того, чтобы продемонстрировать как вычисляется линейная сходимость метода простых итераций.

На следующем шаге мы бы воспользовались формулой:

Тогда:

Интерпретация:

Если бы , это означало бы очень медленную сходимость.

Если — сходимость заметная, но всё равно линейная.

В методе простых итераций мы просто отслеживаем, насколько каждый следующий шаг уменьшает ошибку — и это обычно постоянное .

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.

Решите систему нелинейных уравнений методом Ньютона и методом простых итераций с точностью .

1. Матрица Якоби.

Матрица Якоби — это матрица всех частных производных системы:

Она используется в методе Ньютона для линеаризации системы на каждом шаге. Обязательное условие — её обратимость.

1. Геометрический способ отделения корней. Выбор начального приближения.

Будем говорить, что корень отделен на , если других корней на этом отрезке нет. Для отделения корней применяются два способа: графический и аналитический.

Графический способ - построение графика функции применяется наиболее часто, но не обладает большой точностью. Часто бывает удобно заменить уравнение на равносильное , с формированием простых функций и и дальнейшим построением графиков этих функций. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков и .

Для графического метода в случае двух переменных можно построить графики функций. Точки пересечения — предполагаемые корни. Начальное приближение выбирается из этих точек, затем проверяется условие сходимости методов (например, по норме Якобиана или производных функций итераций).

1. Условие сходимости метода Ньютона, решение нелинейных систем уравнений.

Описаны выше.

1. Достоинства и недостатки метода Ньютона.

Недостатки метода Ньютона:

а) необходимость задавать достаточно хорошее начальное приближение;

б) отсутствие глобальной сходимости для многих задач;

в) необходимость вычисления матрицы Якоби на каждой итерации;

г) необходимость решения на каждой итерации системы линейных уравнений, которая может быть плохо обусловленной.

Достоинством метода является квадратичная сходимость из хорошего начального приближения при условии невырожденности матрицы Якоби.

1. Нахождение обратной матрицы.

Формула:

Где – обратная матрица, – определитель матрицы, – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы .

1. Условие сходимости метода простой итерации, решение нелинейных систем уравнений.

Описано выше.

1. Достоинства и недостатки метода простой итерации.

Достоинства метода простой итерации:

а) Простые вычисления.

Недостатки метода простой итерации:

а) Слабая сходимость (линейная).

б) Требует строгого преобразования системы.

в) Очень чувствителен к начальному приближению.

1. Метод Зейделя.

Является модифицированным методом простой итерации, дает лучшую сходимость и экономит память. При нахождении - приближения сразу же используются найденные значения k компонент приближения с меньшим номером.